

Analytische Bestimmung des laminar-turbulenten Übergangs in Grenzschichtströmungen mittels lokaler $SO(4) \times U(1)$ -Eichfeldtheorie

Thomas Merz

Abstract

Der laminar-turbulente Übergang in Grenzschichtströmungen ist ein zentrales Thema der Hydro- und Aerodynamik und wird bislang überwiegend numerisch untersucht. Wir präsentieren eine Methode zur *analytischen Vorhersage* des Instabilitätspunkts (Re_{Bl}^{crit}) und der anschliessenden Verstärkung von Störungen (N -Faktor) basierend auf einer Formulierung der Fluidmechanik als lokale Eichfeldtheorie.

Für die Blasius-Grenzschicht ergibt sich $Re_{Bl}^{crit} = 481$ in Übereinstimmung mit Literaturwerten, sowie eine analytische Funktion für den N -Faktor mit hoher Korrelation zu etablierten Daten (Korrelation $R > 0.999$, $L_{rel}^2 = 2.8\%$ im Vergleich zu [1]). Auch für Falkner-Skan-Strömungen zeigen sich gute Übereinstimmungen. Damit liegen erstmals *geschlossene analytische Ausdrücke* für diese zentralen Kenngrössen des Übergangs vor. Die Methode eröffnet neue Perspektiven für die Beschreibung von Übergangsprozessen in der Strömungsmechanik und bietet Potenzial für die Anwendung auf weitere nichtlineare Phänomene.

Hintergrund

Die präzise Vorhersage des Übergangs von laminarer zu turbulenten Strömung ist ein zentrales Problem der Hydro- und Aerodynamik mit zahlreichen Anwendungen: In der Luftfahrt beeinflusst dieser Übergang massgeblich den Strömungswiderstand von Tragflächen. Auch in der Strömungstechnik, der Automobilindustrie und in Mikrofluidsystemen spielt er eine entscheidende Rolle.

In Grenzschichtströmungen beginnt der Übergang mit Tollmien-Schlichting-Wellen (TS-Wellen, Abbildung 1, orig. [a,b]), deren Entstehungsort (Instabilitätspunkt Re_{Bl}^{crit}) und darauffolgende Verstärkung (N -Faktor) bisher nur numerisch bestimmbar sind [c-j, ad-af]. Die hier präsentierte Arbeit stellt eine Methode zur Bestimmung *geschlossener analytischer Formeln* für Re_{Bl}^{crit} und N vor. Dies führt zu sofortigen Lösungen und einem tieferen Verständnis der physikalischen Vorgänge.

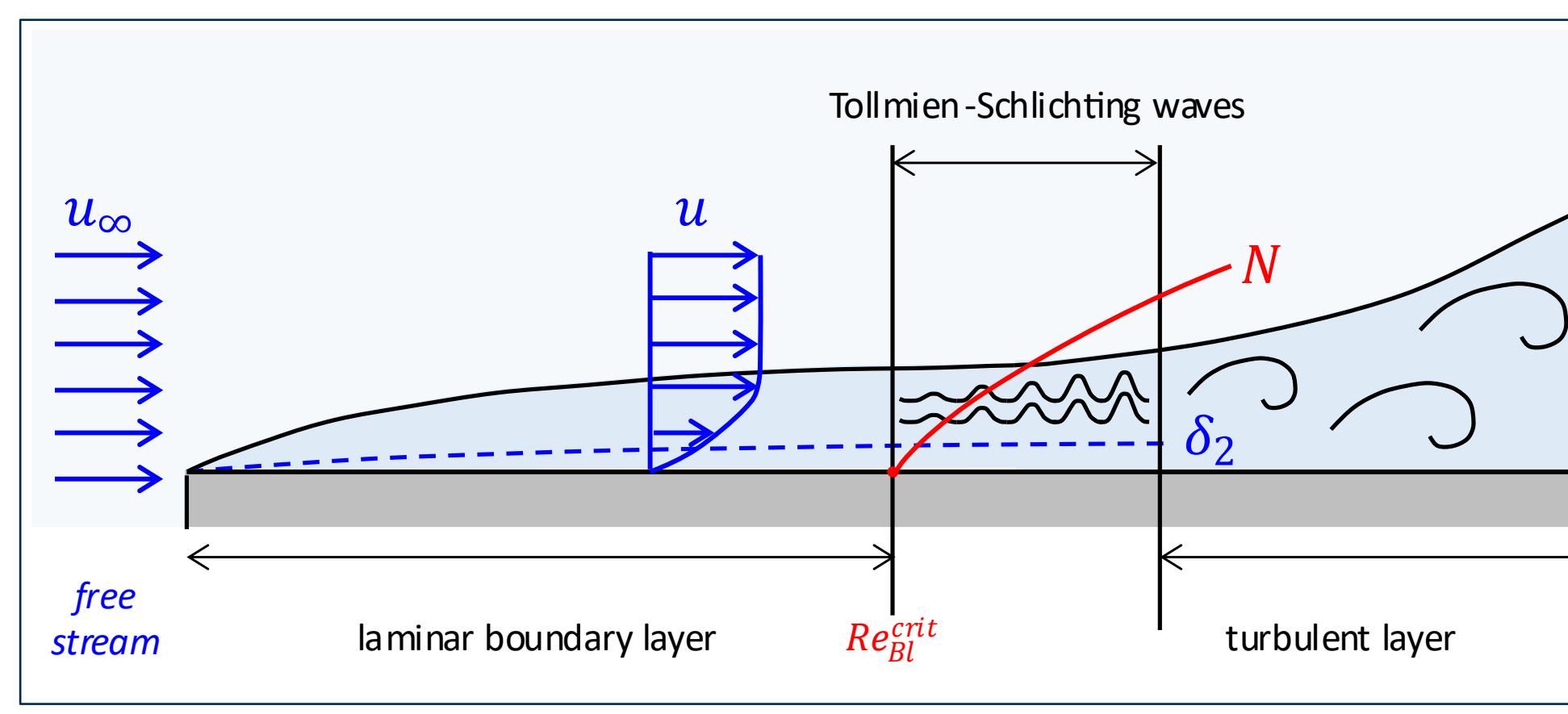


Abbildung 1: Schematische Darstellung der Blasius-Grenzschichtströmung (hellblau) über einer flachen Platte (grau). Eine Anströmung mit Geschwindigkeit u_{∞} trifft von links auf die Platte und bildet stromabwärts ein laminares Geschwindigkeitsprofil u (blaue Pfeile) mit der Impulslustdicke δ_2 (gestrichelt). Mit zunehmender Strecke erfolgt der Übergang zur turbulenten Strömung, eingeleitet durch Tollmien-Schlichting-Wellen (TS-Wellen). Die Instabilität setzt ab der kritischen Reynolds-Zahl Re_{Bl}^{crit} ein; die Verstärkung wird durch den N -Faktor beschrieben (rot, orig. [a,b], vgl. auch [c-j]).

Methoden

Die Mechanik Newtonscher Fluide wird als lokale Eichfeldtheorie [k-p] formuliert. Der Ansatz basiert auf einer eichfeldtheoretischen Beschreibung des Spannungstensors, dessen Divergenz die viskosen Terme der Navier-Stokes-Gleichungen (NS-Gleichungen) bildet [q-t]. Das resultierende Spannungstensor-Feld ist über Impulserhaltung und Divergenz mit den NS-Gleichungen vergleichbar, ermöglicht jedoch darüber hinaus die Formulierung eigenständiger Bewegungsgleichungen für die Eichfelder und deren Wechselwirkungen. Die entwickelte Theorie erlaubt eine störungstheoretische Beschreibung der Transition zur turbulenten Strömung sowie die Ableitung analytischer Formeln.

Als Grundlage nutzt der Ansatz die mathematischen Eigenschaften des Spannungstensors σ und des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors $\dot{\varepsilon}$ welche eine systematische Einbettung in eine Eichfeldtheorie ermöglichen:

- ✓ Beide Tensoren σ und $\dot{\varepsilon}$ sind symmetrische Matrizen und damit reell diagonalisierbar: $\dot{\varepsilon}_{diag} = R^T \dot{\varepsilon} R$, $R \in SO(n)$ (1)
- ✓ Der Tensor $\dot{\varepsilon}$ ist ein Differentialoperator erster Ordnung: $\dot{\varepsilon} = \text{sym}(\nabla \otimes u)$ (2)
- ✓ Die Rotationen R bilden eine kompakte Lie-Gruppe und Gleichung (1) ist eine Differentialgleichung erster Ordnung. Dies ermöglicht eine Yang-Mills-Eichfeldtheorie [k-p].

Darauf aufbauend erfolgt die Herleitung in den folgenden Schritten:

1 globale Symmetrie $U(4)$

Als Erhaltungsgröße betrachten wir den inneren mech Energiefluss: $\frac{d}{dt} E = \frac{1}{2} \text{tr}[\sigma^{\dagger} \dot{\varepsilon}]$ (+ äussere Pot.) = $\frac{1}{2} \text{tr}[U^{\dagger} \sigma^{\dagger} \dot{\varepsilon} U]$ (+ äussere Pot.), (3)

und benutzen dessen Invarianz unter globalen Ähnlichkeits-Transformationen $U \in U(4)$ im vierdimensionalen Raum [w, x].

2 Reduktion $\frac{SO(4) \times U(1)}{\{\pm 1\}}$

Wir betrachten reguläre, normale Matrizen, wodurch sich Gleichung (3) unitär diagonalisieren lässt. Dabei reichen zur Diagonalisierung und Symmetrisierung Transformationen der Untergruppe $SO(4) \times U(1)/\{\pm 1\} < U(4)$ (Anwendung der Autonne-Takagi-Faktorisierung [y, z]).

3 Wurzeln $Cl_{4,0} \otimes Cl_{0,4}$

Die spurfreien Anteile von Ausdruck (3) werden aus der Summe von vier quadratischen Komponenten gebildet. Diese Struktur erlaubt es, ihre Wurzeln in den Clifford-Algebren $Cl_{4,0}$ und $Cl_{0,4}$ darzustellen [aa].

4 Lokalisierung $U \rightarrow U(r)$
 $\partial_{\mu} \rightarrow D_{\mu}$

In dieser Form erfolgt die Aufwertung der globalen zu **lokalen** Symmetrien ($U \rightarrow U(r)$ und $\partial_{\mu} \rightarrow D_{\mu}$) gemäss dem üblichen Vorgehen in der Eichfeldtheorie. Aufgrund der Konstruktion (siehe Schritt 2) entspricht dies geometrisch einer lokalen Diagonalisierung von $\dot{\varepsilon}$.

5 Umordnen und abbilden $Cl_{4,0} \otimes Cl_{0,4}$
 $Cl_{2,2} \otimes Cl_{2,2}$
 $R_{\tau}^{4 \times 4} \otimes R_{\tau}^{4 \times 4}$

Die Struktur der involvierten Gruppen und Algebren ermöglicht eine Abbildung nach $Cl_{2,2}(\mathbb{R}) \otimes Cl_{2,2}(\mathbb{R})$, welche isomorph ist zum Matrizenraum über \mathbb{R}^4 (pos./neg. definite Norm) [ab]. Die erhaltenen Gleichungen für die Eigenwerte haben die Form einer Lagrangedichte für ein Euklidisches Dirac-Feld [ac] mit minimaler Kopplung an die $SO(4) \times U(1)$ -Eichfelder. Sie werden für die betrachteten Grenzschichtströmungen vereinfacht (2-dim, inkompressibel) und mit den bekannten Standardmethoden störungstheoretisch ausgewertet [k-p].

Resultate

Für die Blasius-Grenzschicht (flache Platte) ergibt sich $Re_{Bl}^{crit} = 481$, im Einklang mit Literaturwerten (~ 420 bis 520 [1-10], Abbildung 2). Für N wird eine analytische Funktion hergeleitet, die mit van Ingens Kurve [1] eine sehr hohe Übereinstimmung zeigt (Korrelation $R > 0.999$, $L_{rel}^2 = 2.8\%$). Der Übergangsbereich (transition region) wird mit $N = 8.06 - 10.06$ vorhergesagt (van Ingen: $N = 8.22 - 10.30$; Abweichung $< 2.4\%$, Abbildung 3).

Für Falkner-Skan-Strömungen (angewinkelte Platten) wird eine approximative Lösung in einem weiten Bereich des Hartree-Parameters $0 \leq \beta \leq 0.6$ bestimmt. Der Vergleich mit Literaturwerten ergibt eine gute Übereinstimmung für $Re_{\delta_1}^{crit}$ ($R > 0.998$ und $L_{rel}^2 = 4.1\%$ [9], Abbildung 4). Die N -Faktoren zeigen eine hohe Korrelation ($R > 0.996$ für $\beta \leq 0.2$), weisen aber im Vergleich zu [1] eine zunehmende Verschiebung zu höheren Werten auf. Dies führt zu einem Anstieg des Fehlers ($L_{rel}^2 = 4.1\%$ bei $\beta = 0.05$, $L_{rel}^2 = 7.3\%$ bei $\beta = 0.1$, $L_{rel}^2 = 12\%$ bei $\beta = 0.2$; nicht dargestellt).

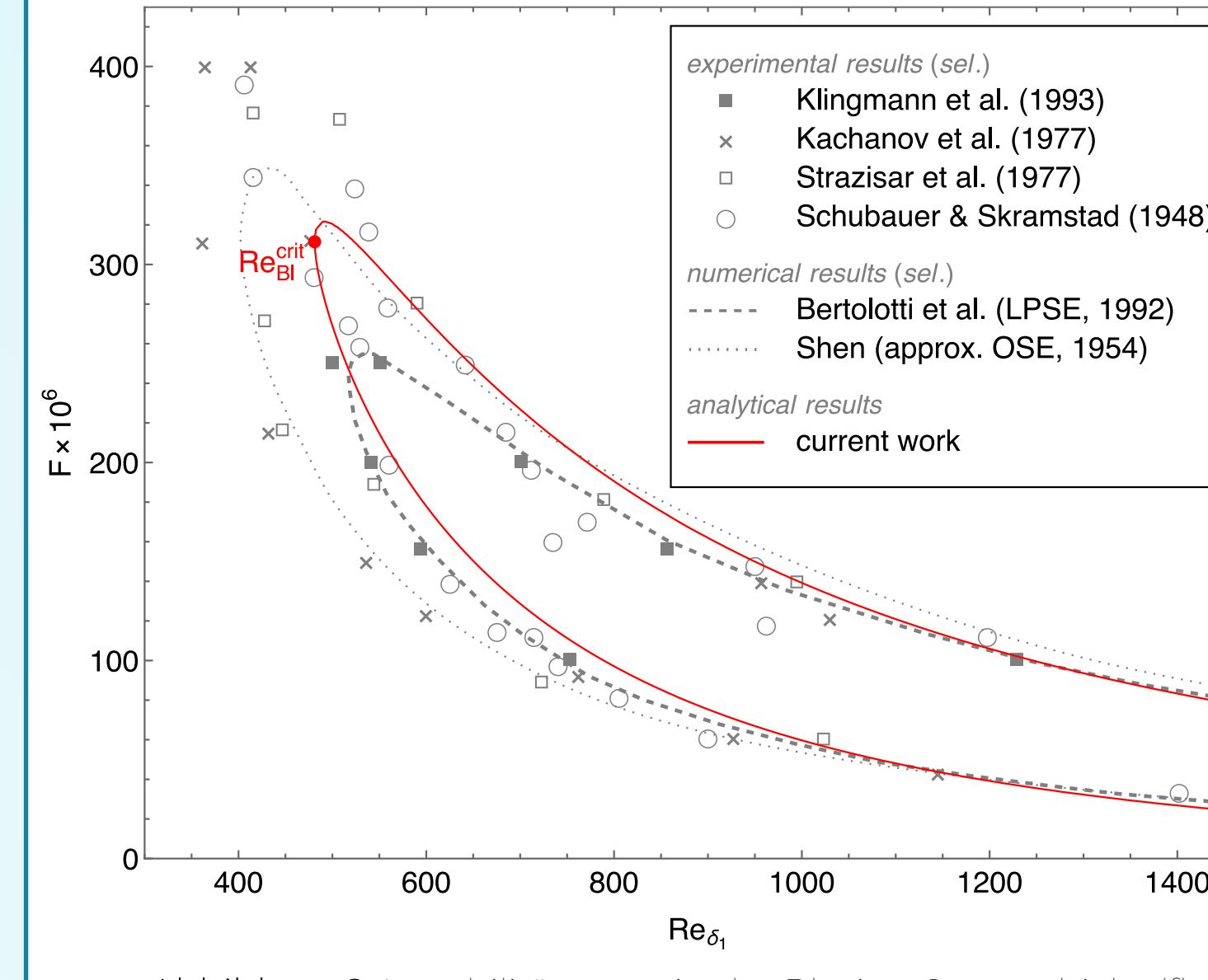


Abbildung 2: Instabilitätszone in der Blasius-Grenzschicht (flache Platte, $\beta = 0$). Reynolds-Zahl $Re_{\delta_1} = u_{\infty}^2 \delta_1^3 / \nu^3$ basierend auf der Verdrängungsstärke δ_1 ; reduzierte Kreisfrequenz: $F = \omega^2 \nu^3 / (u_{\infty}^2 \delta_1^2)$. Vergleich der analytischen Lösung (rot) mit bisherigen Experimenten [2-5] und numerischen Berechnungen [6-7]. Die berechnete kritische Reynolds-Zahl $Re_{Bl}^{crit} = 481$ ist zusätzlich markiert.

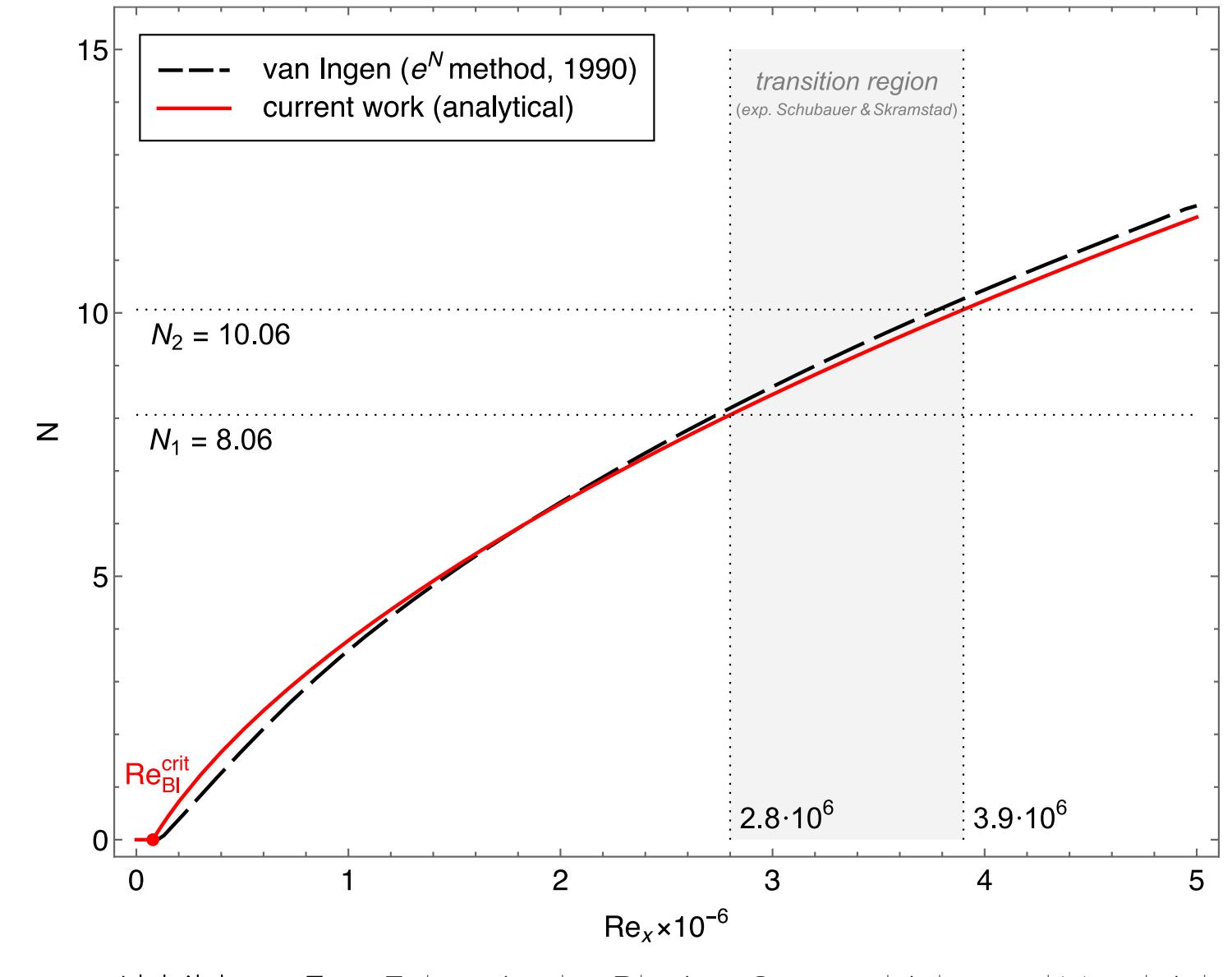


Abbildung 3: N -Faktor in der Blasius-Grenzschicht und Vergleich mit van Ingens Resultat [1]. Reynolds-Zahl $Re_x = u_{\infty}^2 x^3 / \nu^3$ basierend auf der Koordinate entlang der Platte. Die Korrelation ist $R > 0.999$ und der relative Fehler beträgt $L_{rel}^2 = 2.8\%$. Die eingezeichnete kritische Reynolds-Zahl Re_{Bl}^{crit} entspricht der Position in Abbildung 2 in transformierten Koordinaten.

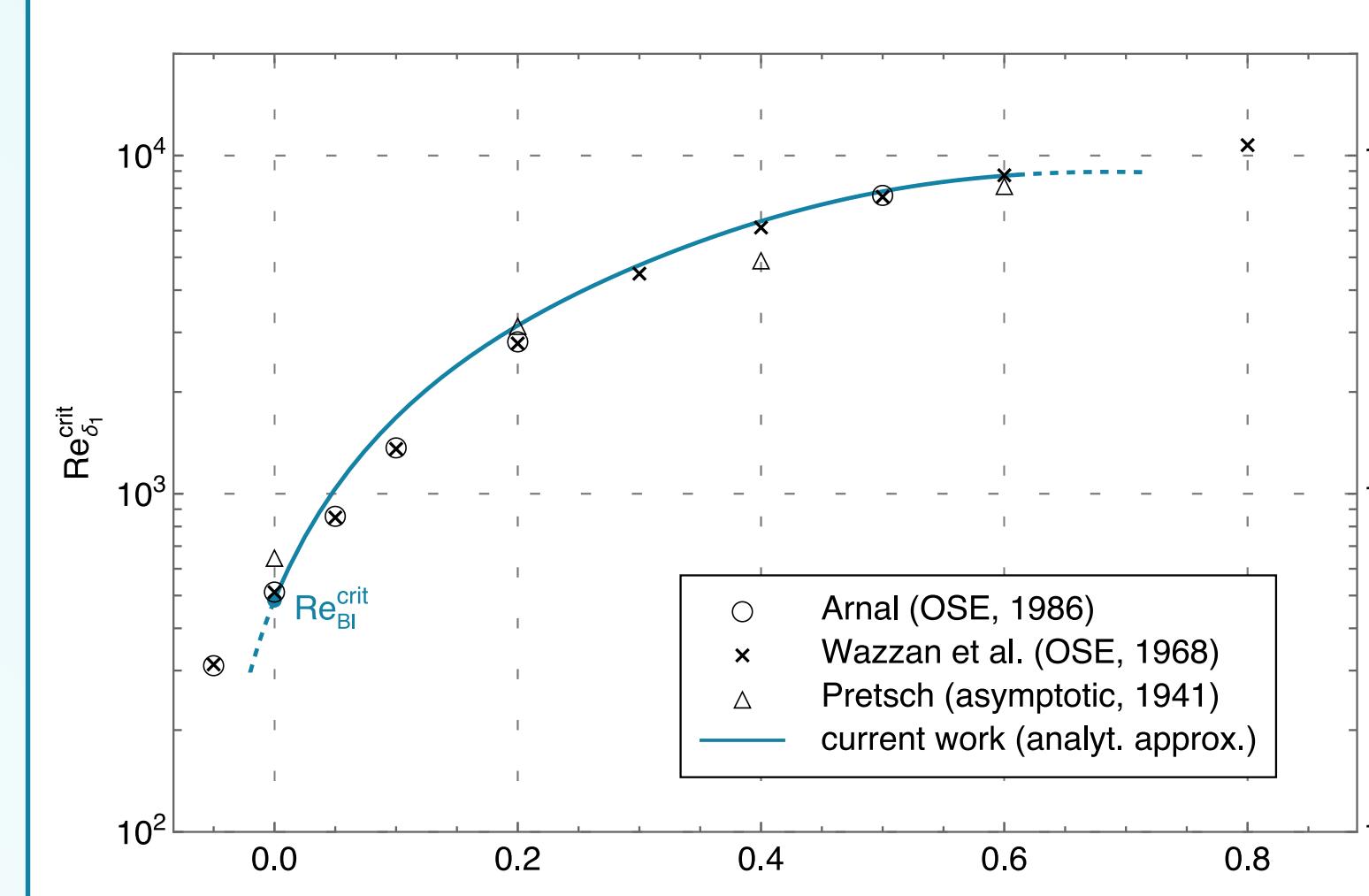


Abbildung 4: Kritische Reynolds-Zahl Re_{Bl}^{crit} in Abhängigkeit des Hartree-Parameters β der den Druckgradienten/Plattenwinkel in Falkner-Skan Strömungen beschreibt. Der Vergleich mit numerischen Lösungen [8-10] zeigt im Bereich $0 \leq \beta \leq 0.6$ eine gute Übereinstimmung ($R > 0.998$ und $L_{rel}^2 = 4.1\%$, vergl. mit Wazzan [9]). Der markierte Wert Re_{Bl}^{crit} bei $\beta = 0$ entspricht der flachen Platte (siehe Abbildungen 2 und 3).

Fazit

Die Methode liefert erstmals *analytisch geschlossene Lösungen* für Re_{Bl}^{crit} und N in der Blasius-Grenzschicht und zeigt auch bei Falkner-Skan-Profilen eine gute quantitative sowie qualitative Übereinstimmung mit vorhandenen Daten.

Der Ansatz ist auf dreidimensionale Strömungen, höhere Ordnungen der Störungstheorie und alternative Materialgesetze verallgemeinerbar. Er lässt sich damit auf zahlreiche weitere Probleme der Kontinuumsmechanik anwenden, welche den Übergang von einer bekannten, linearen Lösung in ein nichtlineares Regime beinhalten. Weitere Forschung ist erforderlich, um die Genauigkeit und Anwendbarkeit der Formeln zu validieren und die Potenziale und Grenzen der Methode weiter zu untersuchen.

Referenzen (weitere Details & Links online verfügbar, siehe QR-Code)

- [1] Van Ingen J.L. (1990), in: Separated Flows and Jets. doi:10.1007/978-3-642-84447-8_73
- [2] Klingmann B. et al. (1993), Eur. J. Mech. B Fluids 12, 493-514
- [3] Kachanov S.Y. et al. (1977), Fluid Dyn. 12, 383-390. doi:10.1007/BF01050568
- [4] Strazisar A.J. et al. (1977), J. Fluid Mech. 83, 225-247. doi:10.1017/S002212077001177
- [5] Schubauer G.B. & Skramstad H.K. (1948), Report NACA TR-909
- [6] Bertolotti F.P., Herbert T., Spalart P.R. (1992), J. Fluid Mech. 242, 441-474. doi:10.1017/S0022112092002453
- [7] Shen S.F. (1954), J. Aero. Sci. 21, 62-64. doi:10.2514/8.2920
- [8] Wazzan A.R. et al. (1968), McDonnell Douglas Report AD071298
- [9] Wazzan A.R. et al. (1968), McDonnell Douglas Report AD071298
- [10] Preisch J. (1941), Jahrbuch der Deutschen Luftfahrtforschung, p. 58



[a]-[al] Grundlagen und historische Arbeiten (online verfügbar, siehe QR-Code)

<https://qvtheory.net/references-poster-1-de/>